

بطاقات منهجية
في

الفيزياء

رقم

3

Hard equation

حركات جسم

صلب خاضع

لقوى ثابتة

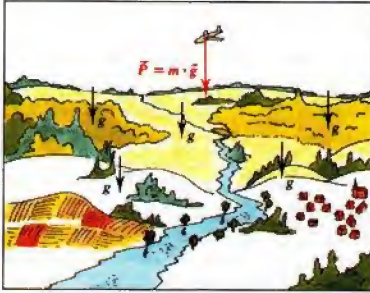
AS

Physique
BAC

حركات جسم صلب خاضع لقوى ثابتة

1. حقل الجاذبية المنتظم :

يخضع الجسم الموضوع بجوار الأرض إلى قوى الجذب العام و التي تكافئ إلى قوة وحيدة تسمى قوة الثقالة أو ثقل جسم، عبارة هذه القوة تعطى بالعلاقة :

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$


حيث \vec{g} هو حقل الجاذبية في نقطة تواجد الجسم.

يتميز شعاع حقل الجاذبية \vec{g} بالخصائص التالية :

- الحامل : معين بشاقول المكان.
- الجهة : من الأعلى نحو الأسفل.
- القيمة : هي شدة حقل الجاذبية في المكان المعبر.

ملاحظة : يتغير حقل الجاذبية بتغير المكان و بتغير الارتفاع، لكنه يمكن اعتبار أن المجال الذي لا تتعدى فيه الأبعاد رتبة بضعة كيلومترات أن حقل الجاذبية فيه متماثل في الحامل، الجهة و الشدة. فنقول عن الحقل أنه منتظم .

تبلغ شدة حقل الجاذبية بجوار سطح الأرض القيمة $9,8 \text{ N.kg}^{-1}$.

2. القوى المؤثرة على جسم صلب في حالة سقوط شاقولي:

يخضع الجسم الصلب الذي يسقط شاقوليا في مائع (هواء أو سائل) إلى تأثير القوى التالية :

- **ثقل الجسم :** قوة شاقولية ، موجهة نحو الأسفل، قيمتها ثابتة، تعطى عبارة هذه القوة

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

- **دافعة أرخميدس :** هي القوة التي يؤثر بها المائع ذي الكتلة الحجمية ρ_0 على جسم حجمه V مغمور كلياً في المائع.

تنمذج دافعة أرخميدس بقوة شاقولية موجهة نحو الأعلى ، قيمتها ثابتة تساوي إلى ثقل حجم

$$\vec{\pi} = -\rho_0 \cdot V \cdot \vec{g}$$

- **قوة الاحتكاك الناتجة عن المائع:** هي قوة شاقولية، موجهة دائما في عكس جهة الحركة، قيمتها تتغير خلال الحركة لأنها تتعلق بسرعة الجسم.

تتعلق عبارة هذه القوة بالمائع و بمجال السرعة.

فعندما تكون قيم السرعة ضعيفة (أقل من السنتمتر في الثانية)، تعطى عبارة قوة احتكاك

$$\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$$

و عندما تكون قيم السرعة متوسطة (تتراوح من بضعة سنتيمترات في الثانية إلى بضعة عشرات من الأمتار في الثانية)، تعطى عبارة قوة احتكاك المائع في هذه الحالة بالعلاقة:

$$\vec{f} = -k.v^2.\vec{u}$$

حيث \vec{u} هو شعاع الوحدة الموجه في اتجاه الحركة.

3. السقوط الشاقولي بوجود الاحتكاك :

- حالة قوة احتكاك المائع من الشكل : $f = k.v$

بتطبيق قانون نيوتن الثاني على مركز عطالة الجسم

الساقط في المائع، نكتب : $\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{f} = m.\vec{a}$

بإسقاط هذه العلاقة على المحور OZ الشاقولي

و الموجه نحو الأسفل : $P - \pi - f = m.a$

$$m.g - \rho_0.V.g - k.v = m.a$$

و حيث أن : $a = \frac{dv}{dt}$ ، $m = \rho.V$ مع ρ هي الكتلة الحجمية للجسم.

$$\text{و منه : } g.\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) - \frac{k}{m}.v = \frac{dv}{dt}$$

و هي المعادلة التفاضلية للحركة.

فإذا كانت مدة سقوط الجسم كافية، تبلغ السرعة قيمتها الحدية v_ℓ عندما يكون : $\frac{dv}{dt} = 0$

$$\text{أي أن : } v_\ell = m.\frac{g}{k}.\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

المعادلة التفاضلية الموجودة هي من نفس نمط المعادلات التفاضلية التي صادفناها في دراسة

ثنائيات القطب (R,C) و (R,L)، فهي تقبل حلا من الشكل :

$$v = v_\ell.\left(1 - e^{-\frac{k}{m}.t}\right)$$

و هنا أيضا يمكننا تعريف ثابت الزمن τ ، حيث نضع : $\tau = \frac{m}{k}$

فتصبح بذلك عبارة السرعة من الشكل :

$$v = v_\ell.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

و بالمثل فإن المدة $t_{1/2}$ هي المدة الزمنية التي من أجلها تبلغ السرعة القيمة $\frac{v_\ell}{2}$.

بالتعويض في عبارة السرعة، نجد : $t_{1/2} = \tau.\ln 2$

و باشتقاق عبارة السرعة بالنسبة للزمن، نحصل على عبارة التسارع :

$$a = \frac{v_\ell}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} = g.\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right).e^{-\frac{k}{m}.t}$$

يتعلق التسارع بالكتلتين الحجميتين للجسم و للمائع.

ففي اللحظة $t = 0$ ، فإن : $a_0 = g \cdot \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$

و تنتهي قيمة التسارع نحو الصفر عندما يصبح t كبيرا أمام τ .

- حالة قوة احتكاك المائع من الشكل : $f = k \cdot v^2$

في هذه الحالة تكون عبارة المعادلة التفاضلية للحركة هي : $m \cdot g - \rho_0 \cdot V \cdot g - k \cdot v^2 = m \frac{dv}{dt}$

أي أن : $g \cdot \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) - \frac{k}{m} \cdot v^2 = \frac{dv}{dt}$

و يتم بلوغ السرعة الحدية v_l عندما يكون : $\frac{dv}{dt} = 0$

$$v_l = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)}{g}} \quad \text{إذن :}$$

4. دراسة حركة السقوط الشاقولي الحر :

السقوط الحر لا يحدث إلا في الفراغ، لكنه من أجل أجسام كثيفة (كرة معدنية مثلا) و ارتفاعات سقوط ضعيفة من رتبة المتر، يمكننا أن نقبل أن تأثيري قوة احتكاك الهواء و دافعة أرخميدس مهملان.

و بذلك تكون القوة الوحيدة المؤثرة على الجسم هي ثقله \vec{P} .

بتطبيق قانون نيوتن الثاني على الجملة (الجسم) في المرجع الأرضي الذي نعتبره غاليليا،

$$\vec{P} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$$

أي أن : $\vec{a} = \vec{g}$

بالإسقاط على المحور الشاقولي Oz الموجه نحو الأسفل، نجد : $a = g$

نستنتج من ذلك أن تسارع الجسم لا يتعلق بكتلته.

و بما أن التسارع ثابت، فإن الحركة المستقيمة لمركز عطالة الجسم هي **متسارعة بانتظام**.

- السقوط الحر بدون سرعة ابتدائية :

لدينا من العلاقة الأخيرة : $a = \frac{dv}{dt} = g$

و بإجراء التكامل على هذه المعادلة، نحصل على المعادلة الزمنية للسرعة : $v = g \cdot t + v(0)$

لكن، نعلن أن : $v(0) = 0$. إذن : $v = g \cdot t$

و بإجراء التكامل مرة أخرى على العبارة الأخيرة، نحصل على المعادلة الزمنية للحركة :

$$z = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + z(0)$$

لكن : $z(0) = 0$ على اعتبار أن الجسم انطلق من المبدأ O في اللحظة $t=0$.
و منه :

$$z = \frac{1}{2} g t^2$$

- السقوط الحر بسرعة ابتدائية نحو الأسفل :

المحور Oz هو دائما موجه نحو الأسفل.

طبقا لهذا التوجيه فإن الشروط الابتدائية تكون على النحو التالي :

$$z(0) = 0 \quad \text{و} \quad v_z(0) = v_0 > 0$$

إذن : $v_z = g.t + v_0$. و كذلك : $z = \frac{1}{2} g.t^2 + v_0.t$

السرعة و ارتفاع السقوط يتزايدان خلال الحركة.

- السقوط الحر بسرعة ابتدائية نحو الأعلى :

مع الاحتفاظ بنفس التوجيه للمحور Oz ، تتغير الشروط الابتدائية المتعلقة بالسرعة و تكون على النحو التالي :

$$z(0) = 0 \quad , \quad v_z(0) = -v_0 < 0$$

إذن : $v_z = g.t - v_0$

و كذلك : $z = \frac{1}{2} g.t^2 - v_0.t$

تتناقص سرعة الجسم أثناء الصعود حتى تنعدم عندما يبلغ الجسم ارتفاعه الأعظمي.

فإذا كانت t_1 هي اللحظة الموافقة لانعدام السرعة، نكتب : $g.t_1 - v_0 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g}$

و بذلك يكون الارتفاع الأعظمي هو : $z_{\max} = \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 - v_0 \left(\frac{v_0}{g} \right)$

و منه : $z_{\max} = -\frac{v_0^2}{2g}$

ملاحظة : عندما يبلغ الجسم الذروة (النقطة الموافقة للارتفاع الأعظمي) ينزل الجسم و يمر من جديد بنقطة المبدأ O بالسرعة $v_z = v_0$ بدلا من $v_z = -v_0$ أثناء الصعود.

5 - حركة قذيفة في حقل الجاذبية الأرضية :

- المعادلات الزمنية :

ندرس حركة قذيفة (كرة حديدية مثلا) في المرجع الأرضي الذي نعتبره غاليليا.

قذفت الكرة بسرعة v_0 يصنع حاملها زاوية α مع المستوي الأفقي.

تخضع الكرة، بعد قذفها، إلى قوة وحيدة هي ثقلها \vec{P} و ذلك بإهمال الاحتكاكات الناتجة عن الهواء.

ندرس حركة موضع مركز عطالة الكرة في المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ الذي مبدؤه O ينطبق على موضع مركز عطالة الكرة في لحظة القذف $t=0$.
يتحرك مركز عطالة الكرة في المستوي (xOz) الحاوي على شعاع السرعة \vec{v}_0 و محوره الشاقولي $(0, \vec{k})$ موجه نحو الأعلى.
بتطبيق قانون نيوتن الثاني على مركز عطالة الكرة في معلم الدراسة، نكتب :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= \vec{P} = m \cdot \vec{a}_G \\ m \cdot \vec{g} &= m \cdot \vec{a}_G \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{g}\end{aligned}$$



إذن مركبات التسارع هي :

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = -g \end{cases}$$

بإجراء التكامل، نحصل على مركبات شعاع السرعة :

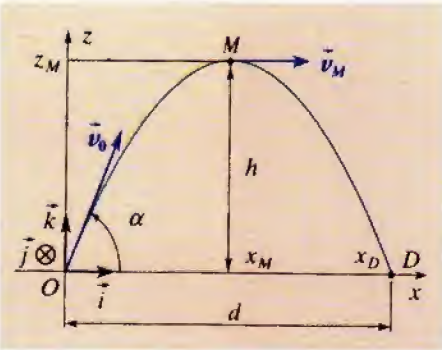
$$\vec{v} \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = c_1 \\ v_y = \frac{dy}{dt} = c_2 \\ v_z = \frac{dz}{dt} = -g \cdot t + c_3 \end{cases}$$

و تعيّن قيم الثوابت c_1 و c_2 و c_3 من الشروط الابتدائية، حيث مركبات شعاع السرعة الابتدائية \vec{v}_0 في اللحظة $t=0$ هي :

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{ox} = v_o \cdot \cos \alpha \\ v_{oy} = 0 \\ v_{oz} = v_o \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

و منه :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = v_o \cdot \cos \alpha \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 0 \\ v_z = \frac{dz}{dt} = -g \cdot t + v_o \cdot \sin \alpha \end{cases}$$



و بإجراء التكامل مرة أخرى بالنسبة للزمن، نحصل على المعادلات الزمنية الوسيطة

$$\overrightarrow{OG} \begin{cases} x = v_o \cdot \cos \alpha \cdot t + c_4 \\ y = 0 + c_5 \\ z = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_o \cdot \sin \alpha \cdot t + c_6 \end{cases} \quad \text{للحركة :}$$

لكن مركز عطالة الكرة موجود عند المبدأ $O(0,0,0)$ في اللحظة $t=0$.
إذن : $c_4 = c_5 = c_6 = 0$

$$\overrightarrow{OG} \begin{cases} x = (v_o \cdot \cos \alpha) \cdot t \dots \dots \dots (1) \\ y = 0 \dots \dots \dots (2) \\ z = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + (v_o \cdot \sin \alpha) \cdot t \dots \dots \dots (3) \end{cases} \quad \text{و منه :}$$

تبيّن هذه المعادلات الزمنية أن :

- حركة مركز عطالة الكرة G تتم في المستوي الشاقولي (xOz) الحاوي على شعاع السرعة \vec{v}_0 ، لأن $y=0$.
- مسقط الحركة وفق المحور الأفقي (Ox) هي **حركة منتظمة**.
- مسقط الحركة وفق المحور الشاقولي (Oz) هي حركة متغيرة بانتظام.

- معادلة المسار :

نحصل على معادلة مسار مركز عطالة الكرة $y=f(x)$ بحذف عامل الزمن من المعادلتين الزميتين (1) و (3).

$$\text{من المعادلة (1)، لدينا : } t = \frac{x}{v_o \cdot \cos \alpha}$$

$$\text{و بالتعويض عن } t \text{ في المعادلة (3)، ينتج : } z = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_o \cdot \cos \alpha} \right)^2 + (v_o \cdot \sin \alpha) \cdot \frac{x}{v_o \cdot \cos \alpha}$$

$$\text{أي أن : } z = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_o^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + (\tan \alpha) \cdot x$$

فالمسار هو عبارة عن جزء من قطع مكافئ موجود في المستوي الشاقولي الحاوي على \vec{v}_0 .

- حساب الذروة : La flèche :

الذروة هي الارتفاع الأعظمي h الذي تبلغه الكرة.

يكون شعاع السرعة المحمول على المماس للمسار أفقياً عند النقطة M الموافقة لأعظم ارتفاع. وبالتالي فإن المركبة الشاقولية لشعاع السرعة عند ذلك الموضع تكون معدومة : $v_z=0$ و يحدث ذلك في اللحظة t_1 ، حيث يكون :

$$0 = -g \cdot t_1 + v_o \cdot \sin \alpha \Rightarrow t_1 = \frac{v_o \cdot \sin \alpha}{g}$$

و يكون الارتفاع الأعظمي الموافق هو : $z_M = h$

$$h = -\frac{1}{2}g \left(\frac{v_o \cdot \sin \alpha}{g} \right)^2 + (v_o \cdot \sin \alpha) \left(\frac{v_o \cdot \sin \alpha}{g} \right)$$

$$h = \frac{v_o^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}$$

- حساب المدى : La portée

هي الفاصلة $x_D = d$ للنقطة D من المسار ، الواقعة في المستوي الأفقي المار بالنقطة O .
أي أن : $z_D = 0$

$$O = -\frac{g}{2v_o^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + (\tan \alpha) \cdot x \quad \text{إذن :}$$

$$O = x \cdot \left(-\frac{g}{2v_o^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x + \tan \alpha \right) \quad \text{و بوضع } x \text{ عاملا مشتركا، نجد :}$$

الحل $x=0$ يوافق إلى موضع نقطة قذف الكرة من O ، أما الحل الآخر فيعطي فاصلة النقطة D الموافقة لنقطة المدى :

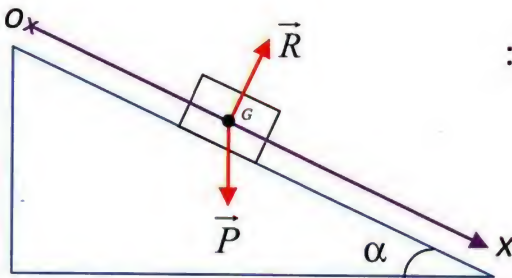
$$x_D = d = \frac{2v_o^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha}{g} = \frac{2v_o^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{g}$$

$$d = \frac{v_o^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} \quad \text{أي :}$$

ملاحظة : يكون المدى أعظميا إذا كان : $\sin 2\alpha = 1$ ، أي : $\alpha = 45^\circ$

6 - حركة مركز عطالة جسم على مستوي مائل :

نترك جسما صلبا مركز عطالته G و كتلته m ليتحرك دون احتكاك انطلاقا من السكون



على طول خط الميل الأعظمي لمستوي

مائل يصنع زاوية α مع المستوي الأفقي.

يخضع الجسم أثناء حركته إلى تأثير قوتين :

ثقله \vec{P} و فعل المستوي \vec{R} على الجسم.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني على مركز

عطالة الجسم في المرجع الأرضي الذي

$$\vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G \quad \text{نعتبره غاليليا :}$$

باسقاط هذه العلاقة على المحور (Ox) ،

$$mg \cdot \sin \alpha = m \cdot a_G \Rightarrow a_G = g \cdot \sin \alpha \quad \text{نجد :}$$

في غياب الاحتكاكات ، تكون حركة الجسم على المستوي المائل مستقيمة متسارعة بانتظام

$$a_G = g \cdot \sin \alpha \quad \text{تسارعها :}$$

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير



و النجاح و المغفرة

Hard_equation